МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. ④ В евклидовом пространстве $CL_2[0,1]$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L = \mathrm{Lin}\left\{ 1,\ x^2 \right\}$. Найти ортогональный базис в подпространстве L.

2. ⑤ Пусть $\vec{n}$ — поле внешних единичных нормалей к границе ∂G области $G = \left\{ x^2 + y^2 < 1 < x + y \right\}$. Для функции $u(x,y) = x^3 + y^3$ вычислить

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds, \quad \text{где контур } \partial G \text{ ориентирован против часовой стрелки.}$$

3. ⑤ Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{S} \frac{dx\, dy}{1 + z^4}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0 \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющим острый угол с осью z.

4. ⑤ Вычислить

$$\oint\limits_{|z| = \frac{1}{4}} \frac{z^2\, dz}{1 + \exp\left(\frac{1}{z}\right)},$$

контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

5. ⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} = \Delta u + xyz^2, \qquad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \cos(x+y),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \frac{z}{1+z^2}.$$

Ответы

для поступающих на четвёртый курс

1. ④ В евклидовом постранстве $CL_2[0,1]$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L = \operatorname{Lin}\left\{\ 1,\ x^2\ \right\}$. Найти ортогональный базис в подпространстве L.

Ответ: проекция $g(x) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2$, базис $\left\{\ 1,\ (1-3x^2)\ \right\}$.

Инструкция: проекция — 2 очка, базис — 2 очка .

2. ⑤ Пусть $\vec{n}$ — поле внешних единичных нормалей к границе ∂G области $G = \left\{\ x^2+y^2 < 1 < x+y\ \right\}$. Для функции $u(x,y) = x^3+y^3$ вычислить

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds, \quad \text{где контур } \partial G \text{ ориентирован против часовой стрелки.}$$

Ответ: По формуле Грина $\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = \iint\limits_{G} \Delta u(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G} 6(x+y)\, dx\, dy =$
$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 6r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\, dr - \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} 6(x+y)\, dy = 4-2 = 2.$

Решение по определению: $\nabla u = (3x^2, 3y^2)$, поэтому
при $x+y=1$ имеем $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ и $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}(x^2+y^2)$,
при $x^2+y^2=1$ имеем $\vec{n} = (x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 3(x^3+y^3)$.
Обозначим

$$\partial G_1 = \left\{\ x^2+y^2 < 1 = x+y\ \right\}, \quad \partial G_2 = \left\{\ x^2+y^2 = 1 < x+y\ \right\},$$

тогда

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = \int\limits_{\partial G_1} \left(-\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x^2+y^2\right)\, ds + \int\limits_{\partial G_2} 3\left(x^3+y^3\right)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x^2+(1-x)^2\right)\sqrt{2}\, dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)\, d\varphi =$$

$$= -3\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\right) + 6\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)\, dt = -2 + 6\left(1-\tfrac{1}{3}\right) = -2+4 = 2.$$

Инструкция: применена формула Грина — 2 очка. Решение по определению: по 1 очку за производную по нормали на гладком куске границы.

3. (5) Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{1+z^4}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{\ x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\ \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющим острый угол с осью z.

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta}{1+\cos^4\theta} = 2\pi\int\limits_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi^2}{4}$.

Инструкция: поверхностный интеграл записан в виде повторного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

4. (5) Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{z^2\,dz}{1+\exp\left(\frac{1}{z}\right)},$$

контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

Ответ: $2\pi i\left(\dfrac{1}{48}-\dfrac{2}{\pi^4}\right)$.

Обозначим $f(z) = \frac{z^2}{1+\exp\left(\frac{1}{z}\right)}$, тогда $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} f(z)\,dz = -2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{\frac{1}{\pi i}} f + \operatorname*{res}\limits_{-\frac{1}{\pi i}} f + \operatorname*{res}\limits_{\infty} f\right)$.

$$\operatorname*{res}\limits_{\frac{1}{\pi i}} f = -\frac{z^4}{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}\bigg|_{z=\frac{1}{\pi i}} = \frac{1}{\pi^4}, \quad \operatorname*{res}\limits_{-\frac{1}{\pi i}} f = -\frac{z^4}{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}\bigg|_{z=-\frac{1}{\pi i}} = \frac{1}{\pi^4},$$

$$f(z) = \frac{z^2}{2}\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{12z^3}+\dots\right)^{-1} = \frac{1}{2z}\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\dots = \frac{1}{48z}+\dots,$$

откуда $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f = -\frac{1}{48}$.

Инструкция: интеграл записан через вычеты — 1 очко, за вычет в конечной точке — 1 очко, за вычет на бесконечности — 2 очка.

5. (6) Решить задачу Коши

$$u_{tt} = \Delta u + xyz^2, \qquad t>0,$$

$$u\,\Big|_{t=0} = \cos(x+y),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \frac{z}{1+z^2}.$$

Ответ: $u = txyz^2 + \frac{t^3}{3}xy + \cos\left(\sqrt{2}t\right)\cos(x+y) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+(z+t)^2}{1+(z-t)^2}\right)$.

$u = a(t)xyz^2 + b(t)xy + c(t)\cos(x+y) + \frac{1}{2}\int\limits_{z-t}^{z+t}\frac{\xi\,d\xi}{1+\xi^2}$, где

$$\ddot{a}(t) = 0, \quad \ddot{b}(t) = 2a(t), \quad a(0) = \dot{a}(0) = b(0) = \dot{b}(0) = 0,$$

$$\ddot{c}(t) = -2c(t) \quad c(0) = 1, \quad \dot{c}(0) = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$a(t) = t, \quad b(t) = \frac{t^3}{3}, \quad c(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right).$$

Инструкция: по 2 очка за

- решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями,

- решение однородного уравнения с нетривиальным первым начальным условием и тривиальным вторым,

- решение однородного уравнения с тривиальным первым начальным условием и нетривиальным вторым.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–1	НЕУД. (1)
2–3	НЕУД. (2)
4–5	УДОВЛ. (3)
6–7	УДОВЛ. (4)
8–10	ХОР. (5)
11–13	ХОР. (6)
14–16	ХОР. (7)
17–19	ОТЛ. (8)
20–22	ОТЛ. (9)
23–25	ОТЛ. (10)